

Varianta 054

Subiectul I

- a) Evident tringhiul este dreptunghic și aria este $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$.
- b) $DC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- c) Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- d) Am $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow L, M, N$ coliniare.
- e) Evident latura este 7 și aria 49.
- f) $(\sqrt{3} + i)^4 = a + bi \Leftrightarrow (3 - 1 + 2\sqrt{3}i)^2 = a + bi \Leftrightarrow (2 + 2\sqrt{3}i)^2 = a + bi \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4 - 12 + 8\sqrt{3}i = a + bi \Leftrightarrow a = -8$ și $b = 8\sqrt{3}$.

Subiectul II

- 1.
- a) $C_6^0 - C_6^1 + C_6^5 - C_6^6 = C_6^0 - C_6^1 + C_6^1 - C_6^0 = 0$
- b) $\log_4 x = -3 \Leftrightarrow \log_4 x = \log_4 4^{-3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{64} > 0$ convine ;
- c) Probabilitatea cerută este $\frac{3}{13}$;
- d) $x^6 - 2x^3 + 1 = (x^3 - 1)^2 = [(x - 1)(x^2 + x + 1)]^2$, deci catul este $x^4 - x^3 - x + 1$, iar restul este 0 ;
- e) $8^x - 16 = 0 \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^4 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$
- 2.
- a) $f'(x) = 2 \sin x \cos x \ (\forall) x \in \mathbf{R}$
- b) $\int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0) = \sin^2 1$
- c) Deoarece $\sin x, \cos x \geq 0 (\forall) x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f'(x) = 2 \sin x \cos x \geq 0$,
 $(\forall) x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f$ crescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0$
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1$.

Subiectul III

a) $\overline{\overline{z}} = \overline{(a-bi)} = a+bi = z.$

b) Fie $z = a+bi, w = c+di$. Am $\overline{z+w} = \overline{(a+c)+(b+d)i} =$
 $= (a+c)-(b+d)i = a-bi+c-di = \overline{z} + \overline{w}$
 $\overline{z \cdot w} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} = (ac-bd)-(ad+bc)i = \overline{z} \cdot \overline{w}$

c) Fie $z = a+bi, a, b \in \mathbf{R}$. Am $z = \overline{z} \Leftrightarrow a+bi = a-bi \Leftrightarrow b=0 \Leftrightarrow z = a \in \mathbf{R}$

d) $f(i) + f(1) = 4i + 3i + 4 - 3 = 1 + 7i$

e) $\overline{f(z)} = \overline{(4z-3\overline{z})} = 4\overline{z} - 3z$

f) $(f \circ f)(z) = f(f(z)) = 4f(z) - 3\overline{f(z)} = 4(4z-3\overline{z}) - 3(4\overline{z}-3z) =$
 $= 16z - 12\overline{z} - 12\overline{z} + 9z = 25z - 24\overline{z} = \frac{7^2+1}{2}z - \frac{7^2+1}{2}\overline{z}$

g) Pentru $n=1$ se verifică, iar pentru $n=2$ vezi f). Presupun

$$(f \circ f \circ \dots \circ f)(z) = \frac{7^n+1}{2}z - \frac{7^n+1}{2}\overline{z} \text{ si am } (f \circ f \circ \dots \circ f)(z) =$$

$$f\left((f \circ f \circ \dots \circ f)(z)\right) = 4(f \circ f \circ \dots \circ f)(z) - 3\overline{(f \circ f \circ \dots \circ f)(z)} =$$

$$4\frac{7^n+1}{2}z - 4\frac{7^n-1}{2}\overline{z} - 3\frac{7^n+1}{2}\overline{z} + 3\frac{7^n-1}{2}z = \frac{7^{n+1}+1}{2}z - \frac{7^{n+1}-1}{2}\overline{z} \text{ și conform principiului}$$

inducției matematice, propoziția e demonstrată pentru orice $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$.

Subiectul IV

a) $f'(x) = 3\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{x - \ln x}{x^2} = 3\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \frac{1 - \ln x}{x^2}$

b) $f(e) = \frac{1}{e^3}; f'(e) = 0.$

c) Folosim a) și b) și vedem că $f'(x) > 0 (\forall) x \in (0, e)$ si $f'(x) < 0 (\forall) x \in (e, +\infty)$, adica f e strict crescătoare pe $(0, e]$ si strict descrescătoare pe $[e, +\infty)$

d) f este continuă pe $(0, \infty)$ și aici nu am asimptotă verticală și cum

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty \Rightarrow x=0$ asimptotă verticală pentru f .

e) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^e (\ln^2 x)' dx = \frac{1}{2} (\ln^2 e - \ln^2 1) = \frac{1}{2}.$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}\right)^3 = 0^3 = 0.$

g) Din c) și b) am văzut că $f(x) \leq f(e) (\forall) x \in (0, \infty)$ cu egalitate pentru $x = e$, adică

$f(x) \leq \frac{1}{e^3} (\forall) x \in (0, \infty)$ cu egalitate pentru $x = e$. Deci

$$f(x) + f(y) = \frac{2}{e^3} \Leftrightarrow x = y = e.$$